Partiel, 12/03/2019

Durée : 1 heure 30 min. Notes et appareils électroniques interdits.

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Exercice 1. (1.5 + 2 + 1 + 1.5 + 1.5)
On considère la forme quadratique sur $\mathbb{R}^4$ définie par

$$Q(x, y, z, t) = 4xy + 8xz + 4xt + 4yz + 4zt.$$

1. Donner la matrice de la forme quadratique dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$.
2. Décomposer Q comme combinaison linéaire de carrés de formes linéaires indépendantes.
3. Donner la signature de Q et son rang.
4. Donner une base de $\mathbb{R}^4$ orthogonale pour la forme quadratique Q.
5. Calculer le noyau de la forme quadratique Q. Est-il égal au cône des vecteurs isotropes ?

Corrigé

1. La matrice de Q est :
$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \\ 4 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$
2. En appliquant l'algorithme de Gauss, on obtient :
$$Q(x, y, z, t) = (x + y + 3z + t)^2 - (x - y - z - t)^2 - 8z^2.$$
3. La signature de Q est $(1, 2)$, et son rang est 3.
4. La matrice dont les lignes sont les formes linéaires en coordonnées données par la question 2 est :
$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$
Il suffit d'inverser cette matrice (par pivot de Gauss par exemple), on obtient
$$P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -1 & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$
ce qui nous donne la matrice d'une base de $\mathbb{R}^3$ orthogonale pour Q.
5. Le noyau est de dimension 1 engendré par $v4 = (0, -1, 0, 1)$. Le vecteur $(1, 0, 0, 0)$ est isotrope, de même que $(0, 1, 0, 0)$, qu ine sont pas dans $\mathrm{vect}(v_4)$.

Exercice 2. (1 + 2.5)
Soit la matrice

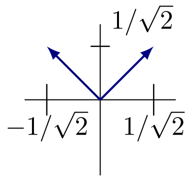
$$M = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

1. Expliquer pourquoi la matrice M est diagonalisable. Quelle propriété peut-on exiger d'une base diagonalisant M ?
2. Expliciter les valeurs propres de M et une base de diagonalisation. Dessiner cette base de diagonalisation.

Corrigé

1. La matrice est symétrique, par le théorème spectral (ou de diagonalisation simultanée) elle est donc diagonalisable en base orthonormée.
2. Les valeurs propres de M sont 2 et -1 (obtenues par exemple par Cayley-Hamilton). Une base de diagonalisation est donnée par

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}.$$



Exercice 3. (1.5 + 1 + 2)
Soit $n \geq 1$ un entier et $x_1, \cdots, x_n$ des réels strictement positifs.

1. Montrer que

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i}\right) \geq n^2.$$

2. Dans quel cas a-t-on égalité ?
3. En déduire que

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \frac{i^2}{1+i^2} \geq \frac{1}{1+\frac{\pi^2}{6n}}.$$

On pourra utiliser la formule

$$\sum_{i=1}^{+\infty} \frac{1}{i^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Corrigé
Soit $n \geq 1$ un entier et $x_1, \cdots, x_n$ des réels strictement positifs.

1. C'est une conséquence de l'inégalité de Cauchy-Schwarz, appliquée aux vecteurs

$$u = (\sqrt{x_1}, \cdots, \sqrt{x_n}) \quad \text{et} \quad v = \left(\frac{1}{\sqrt{x_1}}, \cdots, \frac{1}{\sqrt{x_n}}\right) :$$

cela donne

$$n^2 = \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\sqrt{x_i}}{\sqrt{x_i}}\right)^2 = (u \mid v)^2 \leq \|u\|^2\|v\|^2 = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i}\right).$$

2. On a égalité dans l'inégalité précédente ssi on a égalité dans Cauchy-Schwarz, i.e. si les vecteurs u et v sont colinéaires, c'est-à-dire qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $u = \lambda v$ (ou bien $v = 0$, mais cela est impossible). Cette égalité se traduit par $\sqrt{x_i} = \lambda/\sqrt{x_i}$ pour tout i, soit $x_i = \lambda$ pour tout i. Autrement dit, on a égalité ssi tous les nombres x_i sont égaux.

3. On applique l'inégalité précédente aux nombres

$$x_i = 1 + \frac{1}{i^2}, \quad \text{donc} \quad \frac{1}{x_i} = \frac{i^2}{1+i^2}.$$

Cela donne :

$$\left(\sum_{i=1}^{n} 1 + \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i^2}\right)\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{i^2}{1+i^2}\right) \geq n^2,$$

d'où, en divisant par le premier terme de chaque côté,

$$\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{i^2}{1+i^2}\right) \geq \frac{n^2}{n + \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i^2}}.$$

Or la formule donnée par l'énoncé assure que

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i^2} \leq \frac{\pi^2}{6},$$

donc

$$\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{i^2}{1+i^2}\right) \geq \frac{n^2}{n + \frac{\pi^2}{6}} = \frac{n}{1 + \frac{\pi^2}{6n}}.$$

Exercice 4. (2 + 1.5 + 1)

1. Montrer que l'ensemble des applications continues de $[-1, 1]$ dans $\mathbf{R}$, muni de la forme bilinéaire

$$(f \mid g) = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)\,dx$$

est un espace vectoriel euclidien.

2. Montrer que les fonctions définies sur $[-1, 1]$ par

$$f_1(x) = 1, \qquad f_2(x) = x, \qquad f_3(x) = 3x^2 - 1$$

forment une famille orthogonale de cet espace euclidien.

3. La famille (f_1, f_2, f_3) est-elle libre ?

Corrigé

1. Déjà vu en cours : il s'agit de vérifier que la forme est bilinéaire et définit bien un produit scalaire. On utilise en particulier la positivité de l'intégrale : si f est continue,

$$\int_{-1}^{1} f(t)^2 dt \geq 0 \quad \text{et} \quad \int_{-1}^{1} f(t)^2 dt = 0 \iff f = 0.$$

2. C'est un simple calcul : on vérifie les égalités

$$(f_1 \mid f_2) = (f_1 \mid f_3) = (f_2 \mid f_3) = 0.$$

3. Oui, la famille est libre car orthogonale.